УДК 519.866

КАЧЕСТВЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МОДЕЛИ ДИНАМИЧЕСКОГО ХАОСА И КОРРЕЛЯЦИЯ ОСОБЫХ ТОЧЕК С ТРЕНДАМИ

В.П. Григорьев, А.В. Козловских, Д.А. Марьясов

Томский политехнический университет
E-mail: MaryasovDA@mail2000.ru

Проведено качественное исследование математической модели динамики фьючерсных рынков. Показана возможность прогнозирования моментов смены тренда на основе корреляции траектории особых точек и трендов. Предлагается новая схема адаптации модели с раздельным прогнозированием трендовой и хаотической составляющих.

Введение

Проблема прогнозирования динамики рыночных характеристик исследуется уже достаточно долго. Существуют фундаментальные теории прогнозирования экономических последовательностей, однако они имеют свои ограничения [1]. В настоящее время приоритет принадлежит математическим методам детерминированного хаоса при моделировании экономических процессов [2]. Одним из наиболее перспективных направлений применения этих методов является исследования в области прогнозирования динамики рыночных характеристик.

Авторами была предложена модель динамики фьючерсных рынков [2], одним из достоинств которой является получение прогностических реализаций экономических характеристик с учетом их взаимного влияния.

Для развития этой модели и раскрытия ее потенциальных возможностей и преимуществ в описании и прогнозировании рыночных характеристик необходимо провести математические исследования основной системы нелинейных дифференциальных уравнений модели, определить ее особенности и выявить их связь с закономерностями рассматриваемых характеристик. Это позволит определить структуру ошибки прогноза, а также провести исследование в направлении поиска наиболее эффективных схем адаптации модели.

В данной работе на основе анализа решений системы дифференциальных уравнений модели и выделении трендовой и хаотической составляющих предлагается методика определения моментов смены направления тренда, улучшающая эффективность прогноза, а также новая схема адаптации модели.

Качественное исследование системы дифференциальных уравнений модели

В модели [2] входная информация рассматривается в виде детерминированного хаоса, т.е. хаотическое изменение параметров является нерегулярным (хаотическим), порождаемым нелинейными системами, для которых динамические законы однозначно определяют эволюцию на выбранном временном интервале Δt ($\Delta t/T<<1$, Δt – соответствующая торговая сессия, T – длина исследуемого временного ряда) при известной предыстории [3]. При этом основные уравнения модели, представленные в матричной форме, имеют вид [1]:

$$\dot{\bar{X}} = \boldsymbol{A}\bar{X} + \bar{F}, \qquad (1)$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_1(t) & 0 & 0 \\ 0 & b_2(t) & 0 \\ 0 & 0 & c_3(t) \end{bmatrix}, \quad \bar{X} = \begin{bmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \\ X_3(t) \end{bmatrix},$$

$$\bar{F} = \begin{bmatrix} a_2(t)X_1(t)X_2(t) + a_3(t)X_1(t)X_3(t) \\ b_1(t)X_1(t)X_2(t) + b_3(t)X_2(t)X_3(t) \\ c_1(t)X_1(t)X_3(t) + c_2(t)X_2(t)X_3(t) \end{bmatrix},$$

где в качестве параметров системы выступают различные экономические параметры фьючерсных рынков: цена, объем торгов, «открытый интерес» (количество открытых позиций). Взаимосвязь параметров отражена в перекрестных произведениях [4]. Коэффициенты a_i, b_i, c_{i} ($i=\overline{1,3}$) определяют степень влияния составляющих модели.

Для более детального исследования представленной модели рынка, основанной на системе нелинейных дифференциальных уравнений, применим методы качественной теории дифференциальных уравнений [5]. Сначала найдем точки равновесия системы, а затем рассмотрим движение системы вблизи каждого положения равновесия. Известно, что для системы дифференциальных уравнений первого порядка $\dot{\bar{X}} = f(\bar{X})$, точки равновесия определяются равенством:

$$\dot{\bar{X}} = 0 \quad \text{или} \quad f(\bar{X}_{равн}) = 0, \qquad (2)$$

где $\bar{X}$ – вектор состояния системы.

Для выяснения характера поведения решения вблизи точек равновесия $\bar{X}=\bar{X}_{равн}$ разложим функцию $f(\bar{X})$ в ряды Тейлора вблизи каждой точке равновесия $\bar{X}_{равн}$ и рассмотрим линеаризованные задачи. Устойчивость решения линеаризованной системы определяется знаком действительной части $\mathrm{Re}(\lambda_i)$: когда действительная часть хотя бы одного из чисел λ_i положительна, движение вблизи этой точки равновесия неустойчиво [6].

Уравнения, описывающие положение равновесия системы (1), имеют вид:

$$\begin{cases} 0 = a_1(t)X_1(t) + a_2(t)X_1(t)X_2(t) + a_3(t)X_1(t)X_3(t), \\ 0 = b_1(t)X_2(t)X_1(t) + b_2(t)X_2(t) + b_3(t)X_2(t)X_3(t), \\ 0 = c_1(t)X_3(t)X_1(t) + c_2(t)X_3(t)X_2(t) + c_3(t)X_3(t). \end{cases}$$

Решениями этой системы уравнений является пять точек равновесия в каждый момент времени:

$$O_1 = [0, \quad 0, \quad 0] - \text{тривиальное решение},$$

$$O_2 = \left[0, \quad -\frac{c_3}{c_2}, \quad -\frac{b_2}{b_3}\right], O_4 = \left[-\frac{b_2}{b_1}, \quad -\frac{a_1}{a_2}, \quad 0\right], O_3 = \left[-\frac{c_3}{c_1}, \quad 0, \quad -\frac{a_1}{a_3}\right],$$

$$O_5 = \left[\frac{-a_2b_3c_3 - a_3b_2c_2 + a_1b_3c_2}{a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2}, \frac{-a_3b_1c_3 + a_3b_2c_1 - a_1b_3c_1}{a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2}, \frac{-a_1b_1c_1 + a_2b_1c_3 - a_2b_2c_2}{a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2}\right],$$

где a_i, b_i, c_{i} ($i=\overline{1,3}$) – коэффициенты модели на рассматриваемом временном интервале.

Для установления характера точек равновесия $\bar{X}_{равн}=[X_{1равн} \ X_{2равн} \ X_{3равн}]$ и нахождения собственных чисел λ_i, составим характеристическое уравнение по коэффициентам линеаризованной системы (1):

$$\begin{vmatrix} a_1 + a_2X_{2\,равн} + a_3X_{3равн} - \lambda & a_2X_{1равн} & a_3X_{1равн} \\ b_1X_{2\,равн} & b_1X_{1равн} + b_2 + b_3X_{3равн} - \lambda & b_3X_{2равн} \\ c_1X_{3\,равн} & c_2X_{3равн} & c_1X_{1равн} + c_2X_{2равн} + c_3 - \lambda \end{vmatrix} = 0. \qquad (2)$$

Анализ характеристических чисел, полученных из ур. (2) показал, что в области существования реальных параметров все пять точек равновесия модели являются неустойчивыми. Действительная часть $\mathrm{Re}(\lambda_i)$ хотя бы одного из чисел λ_i является положительной. Это подтверждает, что финансовые рынки носят неустойчивый характер, т.е. подвержены внешним случайным воздействиям, следовательно долгосрочные прогнозы являются менее надежными и значительные преимущества имеют прогнозы краткосрочные.

Сравним траектории особых точек (точек равновесия) с поведением экономических характеристик. При этом неинформативные решения, к которым относятся тривиальное решение (O_1) для всех параметров системы, а также то решение, в котором, координата, соответствующая параметру, принимает нулевое значение будем отбрасывать. (Для первого параметра – это O_2, для второго – O_3, для третьего – O_4).

Реальные траектории экономических параметров (цена, объем торгов и «открытый интерес») приведены на рис. 1. Восстановленные значения особых точек (точек равновесия соответствующей линеаризованной системы) расположены на рис. 2. Во всех последующих рисунках графическая информация приведена для цены, объема торгов и «открытого интереса» соответственно.

Поскольку случайные воздействия на реальные экономические характеристики имеют достаточно сильное влияние, то траектории изменения параметров финансовых рынков достаточно изломаны. Это мешает определению корреляции между траекториями особых точек и реальными траекториями. Поэтому имеет смысл провести корреляцию траекторий особых точек со сглаженными характеристиками.

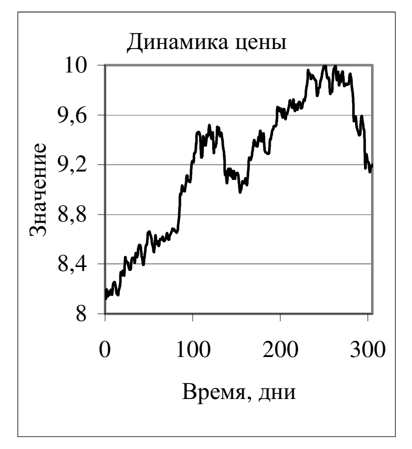
Из физики известно, что если на систему не воздействуют внешние силы, то она колеблется со своей частотой, определяемой характеристиками системы. Похожая ситуация складывается и на финансовых рынках. Если на формирование параметров не влияют какие-либо внешние факторы, то параметры начинают колебаться с некоторой частотой определяемой внутренними законами рынка. В любом случае внешние не достаточно сильные воздействия приводят лишь к некоторому колебанию параметров $\bar{X}$ около стабильной составляющей.

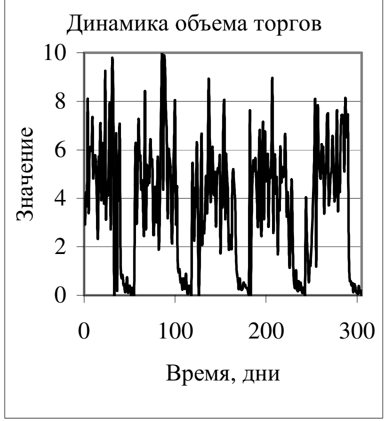
Таким образом, реальную информацию ($\bar{X}$) можно представить в виде суммы двух составляющих: трендовой ($\bar{T}$) и хаотической ($\bar{H}$):

$$X_k = T_k + H_k, \quad k = \overline{1,3}, \qquad (3)$$

где k – номер фазовой координаты. Формой трендовой составляющей будет некоторая сглаженная кривая, не учитывающая резких хаотических (случайных) выбросов. Для ее определения были выбраны метод скользящих средних и полиномиальная аппроксимация.

При полиномиальной аппроксимации использовались полиномы порядка m ($m \geq 4$), коэффициенты которых рассчитывались по методу наименьших квадратов (МНК). Хаотичность H_k подтвердилась экспериментально [3, 7]. Несущие частоты могут быть определены как резкие всплески на спектральной кривой. На рис. 3 представлены полученные графики и реальные кривые. Данные нормированы.





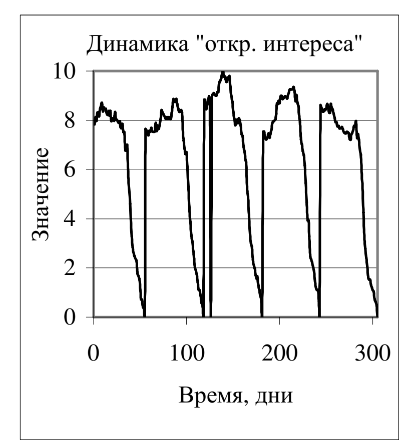
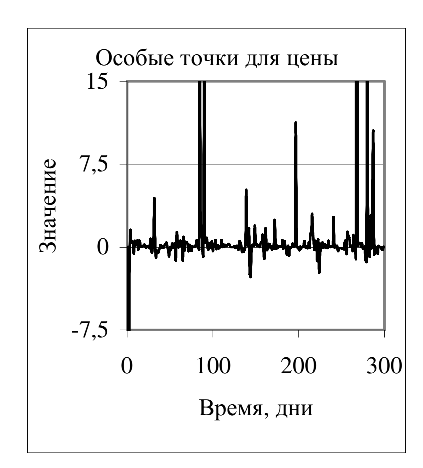


Рис. 1. *Реальные траектории параметров финансовых рынков*





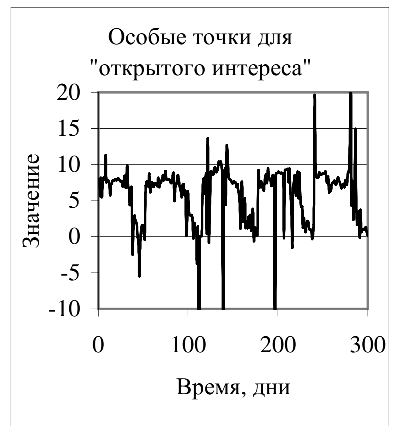
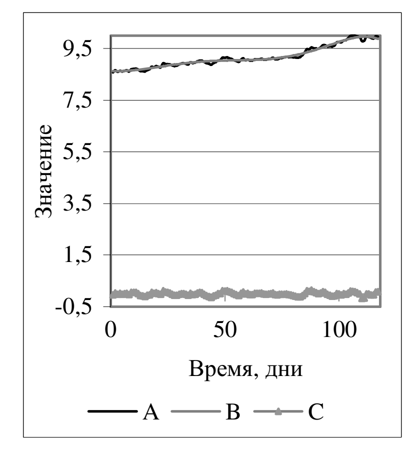
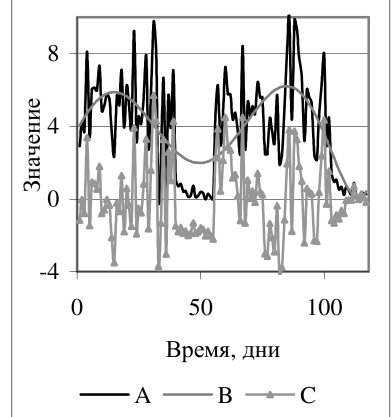


Рис. 2. *Восстановленные значения траекторий особых точек*





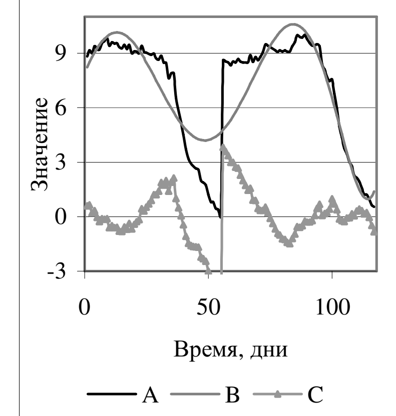


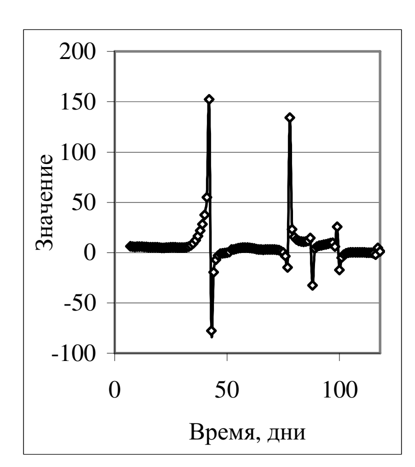
Рис. 3. *Реальные значения (А), трендовая (В) и хаотическая (С) составляющие*

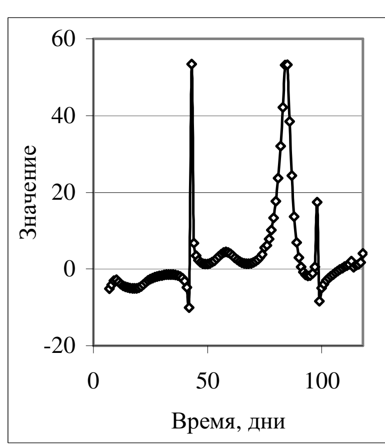
Корреляция особых точек с трендами

Применим к сглаженным рядам (трендам) качественную теорию дифференциальных уравнений: найдем особые точки и построим траектории, образованные особыми точками для трендовой составляющей. Результаты проведенных расчетов приведены на рис. 4. Из анализа полученных результатов следует, что существует взаимосвязь между траекториями особых точек и реальными значениями трендовых составляющих. Наиболее интересным результатом в этом плане является возможность предсказания смены направления тренда по поведению особых точек.

Действительно, моментам времени, в которых траектории особых точек резко (скачком) меняют значения, соответствуют точки на реальной трендовой кривой (рис. 5), в которых, можно утверждать, происходит изменение направления тренда. Это хорошо видно из представленных результатов. Например, на рис. 4 для объема торгов это моменты времени 41-42, 84-85, 98-99, 113-114. Отметим соответствующие этим моментам времени точки на соответствующей сглаженной характеристике (рис. 5). Через некоторый временной интервал трендовая составляющая поменяет направление движения (достигнет экстремального значения) или скорость изменения, а значит, произойдет смена направления тренда или изменение скорости роста или падения значений. Аналогичную зависимость можно заметить для цены – точки 42-43, 77-78, 87-88, 98-99, 115-116 и «открытого интереса» – точки 43-44, 58-59, 75-76, 90, 95, 105-106.

Таким образом, скачки особых точек дают возможность предсказания момента смены тренда или изменения скорости изменения за несколько шагов до реального изменения. Например, для представленных значений этот интервал S от 2 до 5 дней в зависимости от параметра. Для разных видов рынка этот интервал разный, лучшие результаты получены для зарубежных рынков. Выбирая разные методы сглаживания экономических характеристик, получаем разные, но близкие (сходящиеся) значения. Меняя степень сглаживающего полинома в сторону увеличения можно получить информацию об изменении траектории с большей степенью детализации.





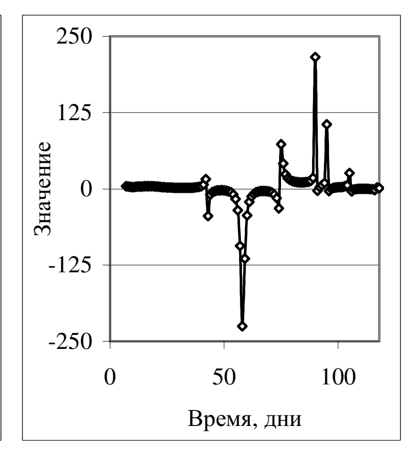
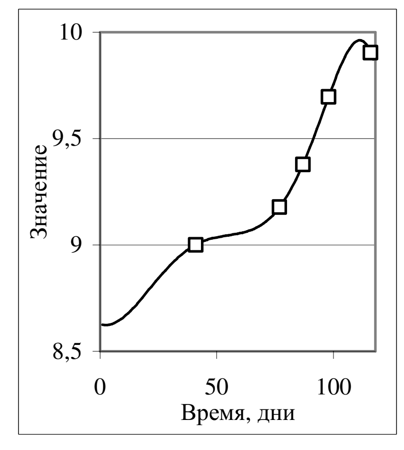
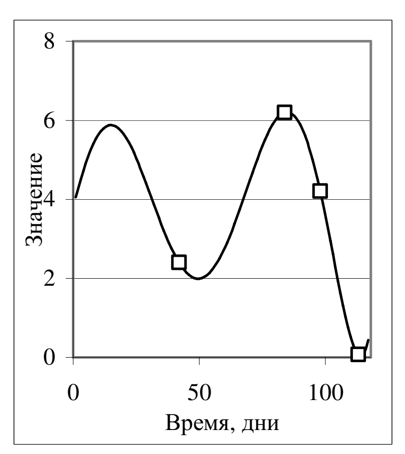


Рис. 4. *Координаты особых точек для трендовой составляющей*





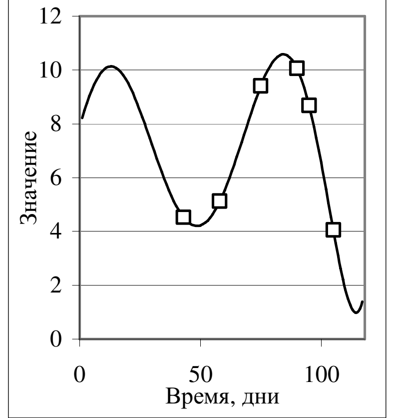


Рис. 5. *Трендовые составляющие с выделенными точками перемены тренда*

Схема адаптации модели

Попробуем провести модернизацию первоначальной схемы адаптации [2] с целью улучшения прогностические реализаций. Для этого разобьем процесс адаптации на несколько шагов.

На первом шаге произведем разделение реальных данных на две составляющие: трендовую (T_k) и хаотическую (H_k), перейдем от одной системы дифференциальных уравнений (1) к совокупности двух систем дифференциальных уравнений, форма которых останется неизменной. Параметрами первой системы будут трендовые составляющие цены, объема торгов и «открытого интереса», а второй – соответствующие хаотические составляющие.

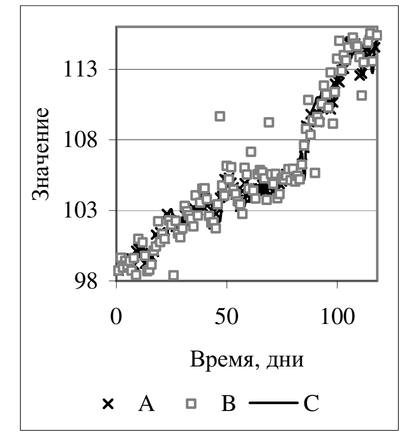
На втором шаге найдем прогностические значения по разработанной схеме адаптации [2] для каждой системы отдельно. Относительная усредненная погрешность полученных прогностических результатов тренда составляет 0,03 % для цены, 3,9 % для объема торгов, 2,7 % для «открытого интереса». Большое увеличение относительной усредненной погрешности для объема торгов и «открытого интереса» объясняется заметным вкладом для малых (близких к нулю) значений фазовых координат. Для больших значений погрешность ~0,45 %.

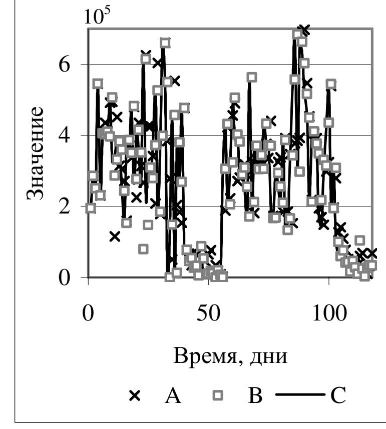
На третьем шаге применим формулу (3), т.е. сложим две прогностические составляющие (прогностическую трендовую и прогностическую хаотическую), получим итоговое суммарное прогностическое значение параметров. Результаты сумм представлены на рис. 6. Новая схема адаптации, учитывающая старую схему, обеспечивает повышение качества прогноза, так относительная погрешность ниже. Для анализа использовались как иностранные, так и российские рынки. Представленные технологии одинаково хорошо работают на всех видах рынка.

Выводы

1. Качественный анализ показал, что существует пять положений равновесия соответствующей линеаризованной системы, и все они являются неустойчивыми, что подтверждает факт неустойчивости рынка в целом. Следовательно, долгосрочные прогнозы являются менее надежными; значительные преимущества имеют прогнозы краткосрочные.
2. Замечена корреляция между значениями трендовой составляющей и траекторией особых точек для соответствующей линеаризованной системы. Эта зависимость позволяет предсказывать моменты изменения направления движения реальных данных, что позволяет формализовать процедуру принятия решений.
3. Проведенное исследование показывает, что на основе динамической модели фьючерсных рынков можно спрогнозировать как трендовую, так и хаотическую составляющие экономических показателей. Схема адаптации позволяет прогнозировать реальные значения параметров через суммирование спрогнозированных составляющих. Что касается прогноза трендовой составляющей, то не зависимо от вида сглаживающей кривой прогностические значения и реальные значения находятся очень близко, относительная усредненная ошибка прогноза не превышает 0,03, 3,9 и 2,9 % для цены, для объема торгов и для «открытого интереса» соответственно.

Таким образом, качественная теория исследования систем дифференциальных уравнений показала, что есть некоторые скрытые механизмы, определяющие поведение системы в будущем и появились новые возможности предсказания тенденций изменения характеристик рынка, например возможность предсказания моментов смены тренда. Предложенная схема адаптации позволяет улучшить качество прогноза. Перспективность использования этой схемы адаптации связано с возможностью предсказания в виде интервального прогноза, определяемого через разброс хаотической составляющей.





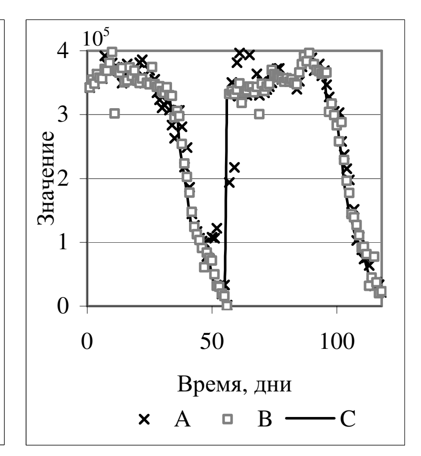


Рис. 6. *Результаты прогнозирования рыночных характеристик: А) новая схема адаптации, В) старая схема адаптации, С) реальные данные*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Экономико-математические методы и прикладные модели / Под ред. В.В. Федосеева. – М.: ЮНИТИ, 2001. – 391 с.
2. Григорьев В., Козловских А., Ситникова О. Динамическая модель фьючерсного рынка // Рынок ценных бумаг. – 2004. – № 24(279). – С. 42–44.
3. Шустер Г. Детерминированный хаос. – М.: Мир, 1998. – 240 с.
4. Мерфи Дж. Технический анализ фьючерсных рынков: теория и практика. – М.: Сокол, 1996. – 412 с.
5. Рейсинг Р., Сансоне Г., Конти Р. Качественная теория нелинейных дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1974. – 318 с.
6. Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения. – 3-е изд. – М.: Наука, 1998. – 340 с.
7. Берже П., Помо И., Видаль К. Порядок в хаосе. О детерминистском подходе к турбулентности. – М.: Мир, 1991. – 368 с.

УДК 681.3